УДК 77.01:535

***Свердлов Сергей Залманович***, профессор кафедры прикладной математики ВГПУ, кандидат технических наук. Тел. +7 921-122-74-43;
E-mail: c3c@uni-vologda.ac.ru

# Выбор дистанции фокусировки при фотосъёмке по критерию минимума среднего кружка нерезкости

Показано, что для получения минимального среднего диаметра кружка нерезкости следует фокусироваться на расстояние, равное среднему арифметическому расстояний до ближней и дальней границ сцены; если дальней границей сцены является бесконечность, фокусироваться, исходя из названного критерия, следует на бесконечность.

***Ключевые слова:*** *цифровая фотография, фокусировка, дистанция фокусировки, кружок нерезкости.*

Одним из необходимых условий получения качественных фотографий является правильная фокусировка (наводка на резкость) фотокамеры при съемке. Фокусировка выполняется на определенное расстояние (определённый объект сцены). При этом точки сцены, находящиеся в плоскости фокусировки, проецируются на плоскость сенсора (плёнку, матрицу) фотокамеры резкими, а точки, расположенные ближе или дальше плоскости фокусировки, размываются и получаются нерезкими. Определим величину этого размытия в зависимости от параметров фотосъемки и расстояния до объектов сцены.

## *Кружок нерезкости*

Воспользуемся моделью тонкой линзы (рис. 1). Изображением точки, находящейся на оптической оси объектива (линзы) на расстоянии $x$, отличном от дистанции фокусировки $L$, на плоскости сенсора будет круг диаметром $d$, который принято называть *кружком нерезкости*

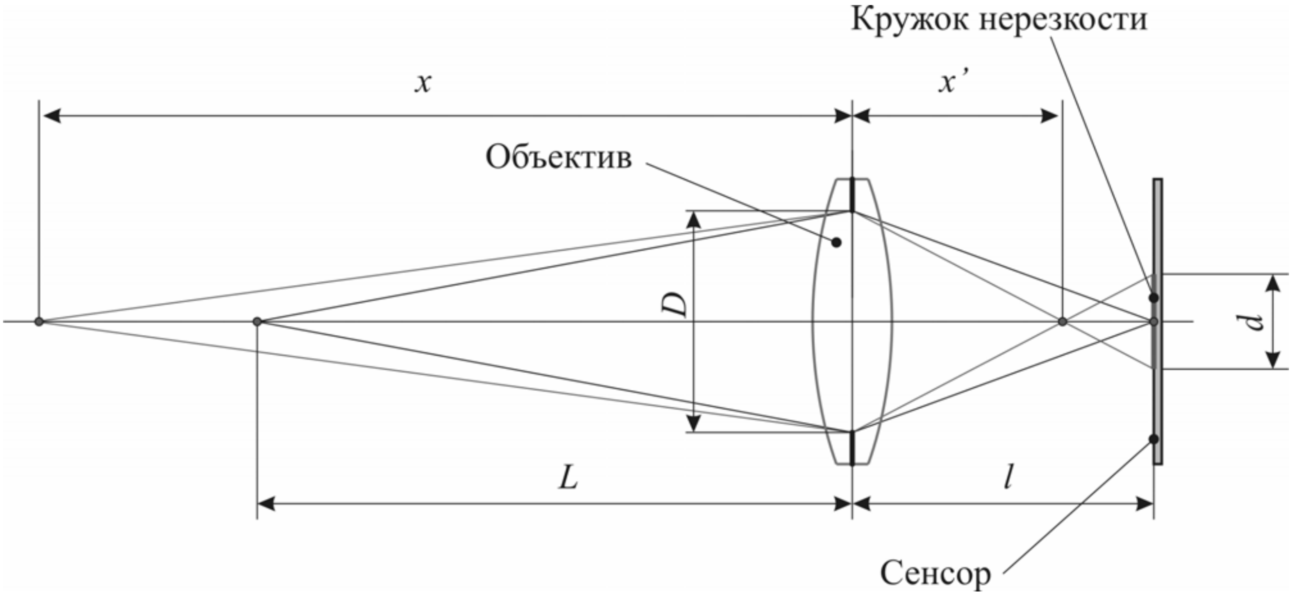


**Рис. 1.** Схема вычисления диаметра кружка нерезкости
*L – дистанция фокусировки; l – расстояние до сенсора; x – расстояние до объекта; x´ – расстояние до изображения; D – диаметр входного зрачка; d – диаметр кружка нерезкости*

Формула тонкой линзы связывает расстояние до объекта, расстояние до изображения и фокусное расстояние $f$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

Расстояния отсчитываются от главной плоскости линзы (объектива). При фокусировке на расстояние $L$ сенсор фотокамеры располагается на расстоянии $l$:

$$\frac{1}{L}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f} \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) найдём расстояние до изображения $x'$ и расстояние до сенсора $l$:

$$x'=\frac{xf}{x-f};\ l=\frac{Lf}{L-f} \qquad (3)$$

Рассмотрим крайние лучи, формирующие изображение точечного объекта (см. рис. 1). Из подобия треугольников определим диаметр кружка нерезкости:

$$\frac{D}{d}=\frac{x'}{l-x'}\Rightarrow\ d=\frac{D\cdot(l-x')}{x'} \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) для *d* выражения для *x′* и *l* из (3), получим:

$$d=\frac{D(x-f)}{xf}\left(\frac{Lf}{L-f}-\frac{xf}{x-f}\right)=\frac{D(x-f)}{xf}\left[\frac{Lf(x-f)-xf(L-f)}{(L-f)(x-f)}\right]=$$

$$=\frac{D}{x}\left[\frac{L(x-f)-x(L-f)}{L-f}\right]=\frac{D}{x}\left(\frac{Lx-Lf-xL+xf}{L-f}\right)=\frac{Df(x-L)}{x(L-f)}$$

С учетом того, что отношение фокусного расстояния к диаметру входного зрачка – это диафрагменное число: $k=f/D$, а значит $D=f/k$, получим:

$$d=\frac{f^2(x-L)}{kx(L-f)} \quad (6)$$

Можно заметить, что для объектов, расположенных ближе к камере, чем точка фокусировки ($x<L$), значение по формуле (6) получается отрицательным. Это означает, что изображение такого объекта располагается не перед сенсором, как изображено на рис. 1, а за ним, где пересекаются крайние лучи, формирующие кружок нерезкости, Учитывая это, уточненную формулу можно записать так:

$$d=\frac{f^2|x-L|}{kx(L-f)} \qquad (7)$$

Формула (7) позволяет определить диаметр кружка нерезкости в зависимости от расстояния до объекта *x* и параметров фотосъемки: фокусного расстояния объектива *f*, диафрагменного числа *k*, дистанции фокусировки *L*.

В большинстве ситуаций, исключая макросъемку, дистанция фокусировки много больше фокусного расстояния объектива. Например, при съемке пейзажей нормальным или короткофокусным объективом *f* = 10–50 мм, а дистанция фокусировки обычно не меньше метра. В этих условиях можно принять $L-f\approx L$ и формула (7) упрощается:

$$d=\frac{f^2|x-L|}{kxL} \quad (8)$$

### *Выбор дистанции фокусировки*

При фотосъемке протяженных по глубине сцен нельзя обеспечить резкое изображение объектов сцены, находящихся на разном расстоянии от камеры[1]. Если ближняя граница объектов сцены, которые желательно получить резкими, находится на расстоянии $x_1$, а дальняя – на расстоянии $x_2$ (отсчет расстояний ведется от главной плоскости вдоль оптической оси объектива), то дистанцию фокусировки $L$ следует выбрать так, чтобы $x_1 \leq L \leq x_2$.

### Равенство кружков нерезкости

Можно выбрать такую дистанцию фокусировки $L$ в пределах $x_1 \leq L \leq x_2$, что диаметр кружка нерезкости на ближней и дальней границе интересующего нас диапазона расстояний (от $x_1$ до $x_2$) будет одинаков. Найдем эту дистанцию из условия $d(x_1) = d(x_2)$, вычисляя $d$ по формуле (8):

$$\frac{f^2|x_1 - L|}{kx_1L} = \frac{f^2|x_2 - L|}{kx_2L} \qquad (9)$$

Чтобы избавиться в уравнении (9) от знака модуля, учтем, что по формуле (6) значение $d$ при $x=x_1$, $x_1<L$ получается отрицательным, а при $x=x_2$, $x_2>L$ – положительным. Тогда:

$$-\frac{f^2(x_1 - L)}{kx_1L} = \frac{f^2(x_2 - L)}{kx_2L} \qquad (10)$$

Упрощая (10), получим:

$$-\frac{x_1 - L}{x_1L} = \frac{x_2 - L}{x_2L} \qquad (11)$$

Решаем уравнение (11) относительно $L$.

$$-(x_1 - L)x_2L = (x_2 - L)x_1L \qquad (12)$$

поскольку $L \neq 0$, обе части (12) можно разделить на $L$:

$$-(x_1 - L)x_2 = (x_2 - L)x_1 \text{ , далее:}$$

$$-x_1x_2 + Lx_2 = x_2x_1 - Lx_1;\ \ L(x_1 + x_2) = 2x_1x_2$$

Окончательно получаем:

$$L = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \qquad (13)$$

Формула (13) известна давно (см. например [1]). Полезно заметить, что в случае, когда дальней границей сцены является бесконечность (например, при съемке пейзажа), из (13) следует, что фокусироваться нужно на удвоенное расстояние до ближней границы:

$$\lim_{x_2 \to \infty} \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = 2x_1 \qquad (14)$$

**Минимум среднего кружка нерезкости**

Равенство кружков нерезкости для ближней и дальней границ сцены – не единственно возможный критерий для выбора дистанции фокусировки. Рассмотрим рис. 2, на котором показаны графики зависимости диаметра кружка нерезкости от расстояния до объекта для нескольких дистанций фокусировки.

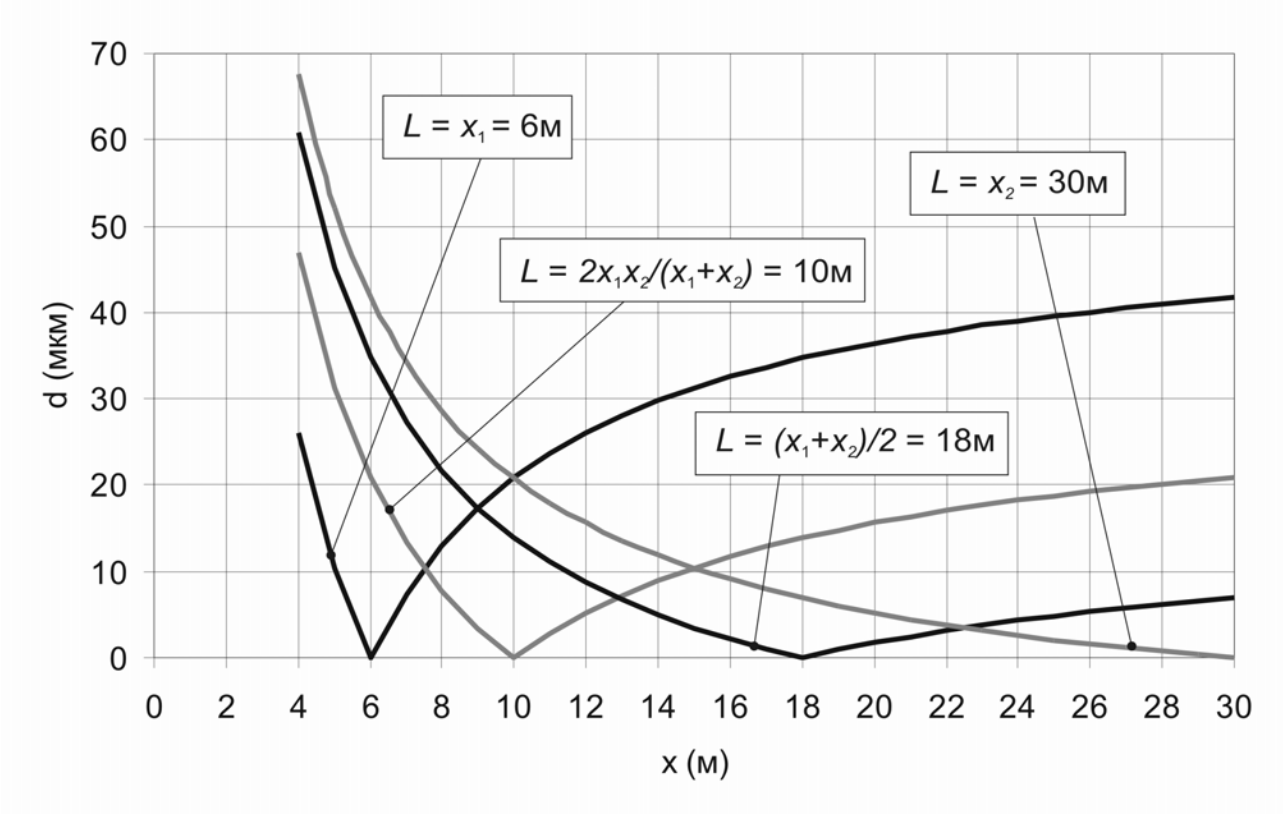


**Рис. 2.** Зависимость диаметра кружка нерезкости от расстояния до объекта при различных дистанциях фокусировки.
*Фокусное расстояние объектива f=50мм; диафрагменное число k=8; расстояние до ближней границы сцены* $x_1$ *= 6м; расстояние до дальней границы* $x_2$ *= 30м*

При выборе дистанции фокусировки в соответствии с (13) диаметр кружка нерезкости на ближней и дальней границах одинаков (изображения объектов на ближней и дальней границе одинаково нерезки). При фокусировке на ближнюю границу диаметр кружка нерезкости быстро возрастает по мере роста расстояния до объекта. Для дальней границы и большинства других расстояний до объектов (значений $x$) он оказывается больше, чем в предыдущем варианте фокусировки. При фокусировке на дальнюю границу кружок нерезкости для объектов, находящихся на ближней границе, оказывается больше, чем в двух предыдущих случаях. Но можно видеть, что на значительном отрезке значений $x$, примыкающих к $x_2$, диаметр кружка нерезкости меньше, чем в этих двух вариантах.

При фиксированных значениях $x_1$ и $x_2$ площадь фигуры, ограниченной кривой зависимости диаметра кружка нерезкости от $x$, осью абсцисс и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$, характеризует величину *среднего кружка нерезкости* на расстояниях до объектов от $x_1$ до $x_2$. Эта площадь равна интегралу

$$I = \int_{x_1}^{x_2} d(x)dx \qquad (15)$$

Используем для $d(x)$ формулу (8). Примем во внимание, что при $x_1 \le x \le L$ $|x - L| = -(x - L)$, а при $L \le x \le x_2$ $|x - L| = x - L$ и разобьем отрезок интегрирования на две части: $x_1 \le x \le L$ и $L \le x \le x_2$.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} d(x)dx = -\int_{x_1}^{L} \frac{f^2(x-L)}{kxL}dx + \int_{L}^{x_2} \frac{f^2(x-L)}{kxL}dx = \frac{f^2}{kL}\left[-\int_{x_1}^{L} \frac{x-L}{x}dx + \int_{L}^{x_2} \frac{x-L}{x}dx\right] =$$

$$= \frac{f^2}{kL}\left[-\int_{x_1}^{L} dx + L\int_{x_1}^{L} \frac{dx}{x} + \int_{L}^{x_2} dx - L\int_{L}^{x_2} \frac{dx}{x}\right] =$$

$$= \frac{f^2}{kL}\left[-(L - x_1) + L(\ln L - \ln x_1) + (x_2 - L) - L(\ln x_2 - \ln L)\right]$$

Упрощая, получаем:

$$I = \frac{f^2}{k}\left(\frac{x_1 + x_2}{L} + 2\ln L - \ln x_1 x_2 - 2\right) \qquad (16)$$

Определим значение $L$, при котором выражение (16) минимально, то есть, определим такую дистанцию фокусировки, при которой средний кружок нерезкости на дистанциях от $x_1$ до $x_2$ минимален. Для этого продифференцируем (16) по переменной $L$ и приравняем производную нулю:

$$\frac{dI}{dL} = \frac{f^2}{k}\left(-\frac{x_1 + x_2}{L^2} + \frac{2}{L}\right) = 0$$

Поскольку $f \neq 0$, решаем уравнение, приравнивая нулю выражение в скобках:

$$-\frac{x_1 + x_2}{L^2} + \frac{2}{L} = 0$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая нулю числитель, получаем:

$$-(x_1 + x_2) + 2L = 0$$

Откуда:

$$L = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (17)$$

Как следует из (17), для достижения минимального среднего диаметра кружка нерезкости нужно фокусироваться на расстояние, равное среднему арифметическому расстояний до ближней и дальней границ сцены.

В случае, если дальней границей является бесконечность, фокусироваться следует на бесконечность (при $x_2 \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$). Это соответствует практике фотографии, когда при съемке пейзажей без выраженного переднего плана фокусируются на бесконечность, получая на фотографии лучшую резкость в среднем.

Следует отметить, что формулы (13) и (17), позволяющие определить дистанцию фокусировки, не включают диафрагменное число и фокусное расстояние объектива. Выбор дистанции фокусировки не зависит от этих параметров, которые определяют лишь величину кружков нерезкости на ближней и дальней границах, среднего кружка нерезкости, но не влияют на тактику выбора дистанции фокусировки.

На рисунке 3 показан график зависимости среднего диаметра кружка нерезкости в зависимости от дистанции фокусировки. Выражение для $d_{\text{ср}}$ получается из (16) делением на $(x_2 - x_1)$:

$$d_{cp} = \frac{f^2}{k(x_2 - x_1)} \left( \frac{x_1 + x_2}{L} + 2\ln L - \ln x_1 x_2 - 2 \right)$$

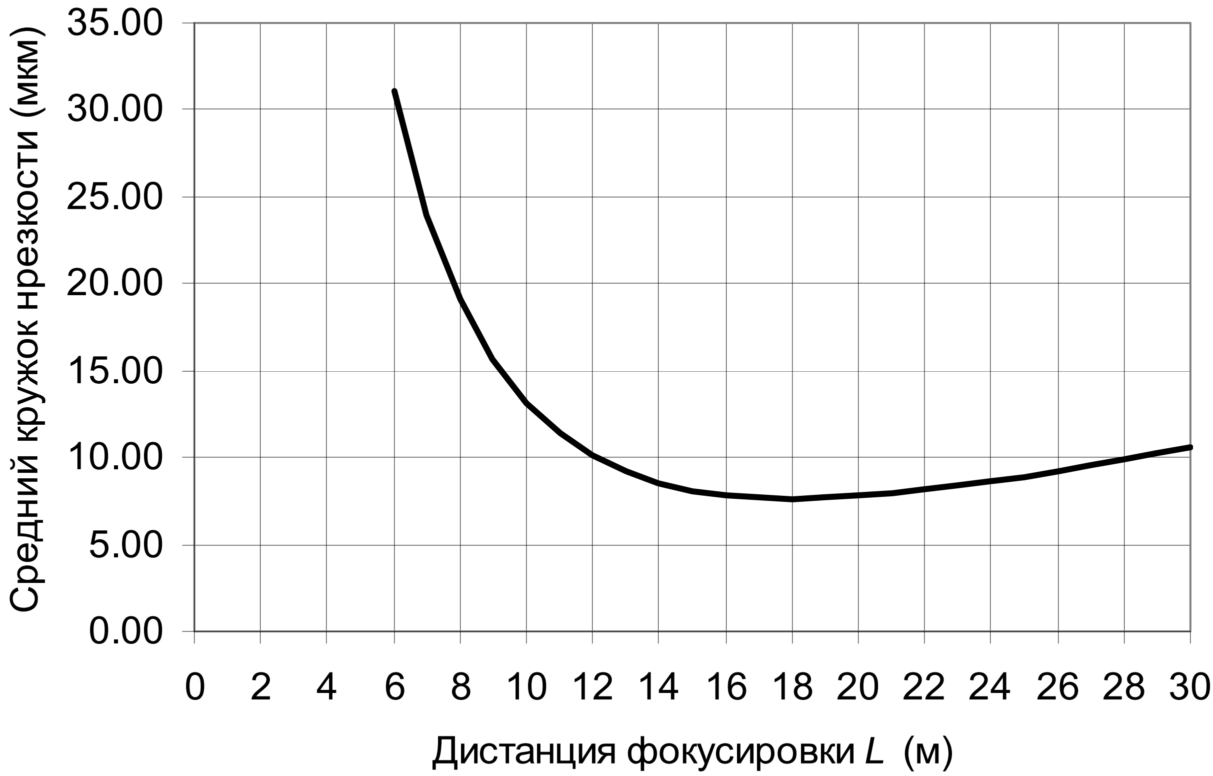


**Рис. 3.** Зависимость среднего диаметра кружка нерезкости от дистанции фокусировки.

*Фокусное расстояние объектива f=50мм; диафрагменное число k=8; расстояние до ближней границы сцены* $x_1$ *= 6м; расстояние до дальней границы* $x_2$ *= 30м*

### Литература

1. *Ногин П. А. Фотографический объектив. М., «Искусство», 1961. 128 с. ил.*

S. Z. Sverdlov

## The choice of focusing distance when shooting on the criterion of minimum average circle of confusion

It is shown that to obtain the minimum average diameter of the circle of confusion should focusing on a distance equal to the arithmetic mean of the distances to the near and far boundaries, if the far boundary is infinity, focus, based on the named criteria, should be to infinity.

---

[1] При использовании обычных объективов и фотокамер, не допускающих наклона оптической оси объектива к плоскости сенсора.