О предельных характеристиках системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами

А. И. Зейфман[*], Я. А. Сатин[†], А. В. Коротышева[‡], Н. А. Терешина[§]

Аннотация: Рассматривается модель системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами в общем случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе. Получены достаточные условия слабой эргодичности процесса, описывающего число требований в системе, и соответствующие оценки. Рассмотрено несколько примеров построения предельных характеристик системы.

Ключевые слова: Нестационарные марковские системы обслуживания; процесс рождения и гибели с катастрофами; слабая эргодичность; оценки; предельные характеристики; аппроксимация

1 Введение

Простейшие (стационарные) модели систем обслуживания с катастрофами начали рассматриваться не очень давно, см., например, [1]–[4]. В таких моделях предполагается, что если в системе обслуживания имеется ненулевое число требований, то с

[*]Вологодский государственный педагогический университет, Институт проблем информатики РАН и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, a_zeifman@mail.ru

[†]Вологодский государственный педагогический университет, yacovi@mail.ru

[‡]Вологодский государственный педагогический университет, a_korotysheva@mail.ru

[§]Вологодский государственный педагогический университет, nataliya_tereshi@mail.ru

ненулевой интенсивностью возможна катастрофа, то есть потеря всех требований, с дальнейшим продолжением функционирования системы обслуживания. Нестационарные марковские модели (процессы рождения и гибели) с катастрофами изучались в работах [5, 6] для случая, когда интенсивности катастроф не зависят от числа требований в системе. В настоящей работе изучается модель системы обслуживания $M(t)/M(t)/S$ с катастрофами в более общем случае, когда интенсивности катастроф зависят от числа требований в системе обслуживания. При этом удается получить достаточно общие условия, гарантирующие наличие слабой эргодичности для процесса, описывающего число требований в такой системе обслуживания, и получить оценки скорости сходимости, гарантирующие возможность приближенного построения предельных характеристик системы.

Обозначим через $X = X(t)$, $t \geq 0$, число требований в момент t для описываемой модели. Тогда $X = X(t)$ является процессом рождения и гибели с катастрофами. Интенсивности рождения, гибели и катастрофы для процесса в случае, если $X(t) = n$, есть $\lambda_n(t) = \lambda(t)$, $\mu_n(t) = \min(n, S)\mu(t)$ и $\xi_n(t) = \zeta_n \xi(t)$ соответственно.

Обозначим через $p_{ij}(s,t) = Pr\left\{X(t) = j \,|X(s) = i\right\}$ вероятности перехода, а через $p_i(t) = Pr\left\{X(t) = i\right\}$ – вероятности состояний для процесса $X = X(t)$.

Тогда для описания процесса получаем прямую систему Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = -\lambda_0(t)p_0 + \mu_1(t)p_1 + \sum_{k\geq 1}\xi_k(t)p_k, \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}(t)p_{k-1} - \left(\lambda_k(t) + \mu_k(t) + \xi_k(t)\right)p_k + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}, k \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{p}(t) = \left(p_0(t), p_1(t), \ldots\right)^T$, $t > 0$, – вектор-столбец вероятностей состояний процесса, а $A(t) = \left\{a_{ij}(t),\ t \geq 0\right\}$ – матрица системы (1.1).

В работе будет предполагаться, что интенсивности поступления и обслуживания требований $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ локально интегрируемы на $[0; \infty)$. Будем считать «базисную» интенсивность катастрофы $\xi(t)$ локально интегрируемой на $[0; \infty)$, а коэффициенты состояний – ограниченными, то есть $0 \leq \zeta_n \leq M$ при некотором $M < \infty$. Тогда систему (1.1) можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A\,(t)\,\mathbf{p}, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

в пространстве последовательностей l_1 с ограниченной почти при всех $t \geq 0$ локально интегрируемой оператор-функцией $A(t)$. Следовательно, можно применять общий подход, предложенный впервые в заметке [7] и развитый затем в [8, 9]. Метод опирается на две основные составляющие: понятие и оценки, связанные с логарифмической нормой операторной функции, и специальные преобразования редуцированной матрицы интенсивностей рассматриваемой марковской цепи, и позволяет получать явные и точные оценки.

2 Слабая эргодичность

Напомним основные определения.

Марковскую цепь $X(t)$ назовем *слабо эргодичной*, если $\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ для любых начальных распределений вероятностей состояний $\mathbf{p}^*(0), \mathbf{p}^{**}(0)$ (здесь и далее через $\|\mathbf{x}\|$ обозначена l_1-норма).

Положим $E_k(t) = E\left\{X(t)\,|X(0) = k\right\}$ – математическое ожидание процесса в момент t при условии, что в нулевой момент времени он находится в состоянии k, иногда будет встречаться также несколько более общее выражение
$E_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{k\geq 0} E\left\{X(t)\,|X(0) = k\right\} p_k(0)$.

Будем говорить, что марковская цепь $X(t)$ имеет *предельное среднее* $\varphi(t)$, если

$$\lim_{t\to\infty} \left(\varphi(t) - E_k(t)\right) = 0$$

при любом k.

В настоящей работе будет изучаться слабая эргодичность и сопутствующие свойства числа требований в рассматриваемой системе обслуживания для следующих важных ситуаций:

(1) интенсивности катастроф существенны при любой длине очереди;

(2) интенсивность обслуживания требований достаточно велика;

(3) достаточно велика интенсивность поступления требований, а интенсивности катастроф существенны для ситуаций, когда длина очереди (количество требований в системе) пропорционально некоторому натуральному числу.

Теорема 1. *Пусть*

$$\inf_n \zeta_n = \zeta > 0 \tag{2.3}$$

и, кроме того, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int_0^\infty \left(\zeta\xi(t) - \varepsilon\lambda(t)\right)\, dt = +\infty. \tag{2.4}$$

Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим $\pi(t)$ и среднее $\phi(t)$, соответствующие начальному условию $X(0) = 0$, то при любом начальном условии вида $X(0) = k$ справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 4\left(1+\varepsilon\right)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int\limits_0^t \left(\zeta\xi(\tau)-\varepsilon\lambda(\tau)\right)\, d\tau} \tag{2.5}$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \leq \frac{4\left(1+\varepsilon\right)^k}{\varepsilon\omega} e^{-\int\limits_0^t \left(\zeta\xi(\tau)-\varepsilon\lambda(\tau)\right)\, d\tau}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Полагая $p_0(t) = 1 - \sum_{i\geq 1} p_i(t)$, получаем аналогично тому, как это проделано в [6], следующую систему:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t), \tag{2.7}$$

в которой

$$B(t) = \begin{pmatrix} -(\lambda_0+\lambda_1+\mu_1+\xi_1) & (\mu_2-\lambda_0) & -\lambda_0 & -\lambda_0 & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & -(\lambda_2+\mu_2+\xi_2) & \mu_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3+\mu_3+\xi_3) & \mu_4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)^T, \quad \mathbf{f}(t) = (\lambda_0(t), 0, 0, \dots)^T.$$

Обозначим оператор Коши линейной неоднородной системы (2.7) через $V(t,z)$, введем в рассмотрение матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & \cdots \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

и пространство последовательностей $\ell_{1D} = \{\mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots)\}$ таких, что $\|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty$, где d_i – пока не выбранные положительные числа.

Теперь рассматриваемый процесс можно исследовать таким же образом, как и в [6].

Положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) + \xi_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t), \quad k \geq 0, \tag{2.9}$$

и

$$\alpha(t) = \inf_{k\geq 0} \alpha_k(t). \tag{2.10}$$

Тогда получаем

$$\gamma(B(t))_{1D} = \sup_{i\geq 0}\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\lambda_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_{i+1}(t) + \xi_{i+1}(t)) + \frac{d_{i-1}}{d_i}\mu_i(t)\right) = -\alpha(t). \tag{2.11}$$

Полагая теперь $d_{-1} = d_0 = 1$, $d_{k+1} = (1+\varepsilon)d_k$, $k \geq 0$, получаем с учетом (2.11) следующую оценку:

$$\begin{aligned}\gamma(B(t))_{1D} \leq -\left(\zeta\xi(t) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(S\mu(t) - (1+\varepsilon)\lambda(t)\right)\right) \\ \leq -\left(\zeta\xi(t) - \varepsilon\lambda(t)\right) = -\alpha_*(t),\end{aligned} \tag{2.12}$$

причем из (2.3) вытекает, что $\int_0^\infty \alpha_*(t)\,dt = +\infty$. Теперь с учетом проведенного ранее (см., например, [8]) сравнения норм получаем слабую эргодичность процесса и оценку

$$\|\mathbf{p}^*(t)-\mathbf{p}^{**}(t)\| \le 4e^{-\int\limits_0^t (\zeta\xi(\tau)-\varepsilon\lambda(\tau))\,d\tau}\|\mathbf{p}^*(0)-\mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \qquad (2.13)$$

Выбирая теперь $\mathbf{p}^*(0)=\pi(0)=\mathbf{e}_0$, $\mathbf{p}^{**}(0)=\mathbf{p}(0)=\mathbf{e}_k$, получаем неравенство (2.5).

Рассматривая величину $\omega=\inf\limits_{k\ge 1}\frac{d_k}{k}$ и убеждаясь, что $\omega=\inf\limits_{k\ge 1}\frac{(1+\varepsilon)^k}{k}>0$, получаем снова из сравнения норм существование предельного среднего и оценку

$$|E_{\mathbf{p}^*}(t)-E_{\mathbf{p}^{**}}(t)| \le \frac{4}{\omega}e^{-\int\limits_0^t (\zeta\xi(\tau)-\varepsilon\lambda(\tau))\,d\tau}\|\mathbf{p}^*(0)-\mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \qquad (2.14)$$

Для завершения доказательства достаточно выбрать снова $\mathbf{p}^*(0)=\pi(0)=\mathbf{e}_0$, $\mathbf{p}^{**}(0)=\mathbf{p}(0)=\mathbf{e}_k$.

Замечание 1. *Пусть все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны. Тогда:*

1) вместо условия (2.4) достаточно потребовать, чтобы $\int_0^1 \xi(t)\,dt>0$*;*

2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим $\pi(t)$ *и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее* $\phi(t)$*;*

3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [8, 6], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

Теорема 2. *Пусть при некотором* $\varepsilon>0$ *выполняется условие*

$$\int_0^\infty \left(S\mu(t)-(1+\varepsilon)\,\lambda(t)\right)\,dt=+\infty. \qquad (2.15)$$

Тогда процесс $X(t)$ *слабо эргодичен и имеет предельное среднее. Если при этом в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим* $\pi(t)$ *и* *среднее $\phi(t)$, соответствующие начальному условию $X(0)=0$, то при любом начальном условии вида $X(0)=k$ справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t)-\pi(t)\| \leq 4\,(1+\varepsilon)^k\,\varepsilon^{-1} e^{-\int\limits_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(S\mu(\tau)-(1+\varepsilon)\lambda(\tau))\,d\tau} \tag{2.16}$$

и

$$|E_k(t)-E_0(t)| \leq \frac{4\,(1+\varepsilon)^k}{\varepsilon\omega} e^{-\int\limits_0^t \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(S\mu(\tau)-(1+\varepsilon)\lambda(\tau))\,d\tau}. \tag{2.17}$$

Доказательство проводится так же, как в предыдущей теореме. При этом, строя то же вспомогательное пространство ℓ_{1D}, вместо (2.13) получаем неравенство

$$\begin{aligned}\gamma\left(B(t)\right)_{1D} &\leq -\left(\zeta\xi(t)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(S\mu(t)-(1+\varepsilon)\lambda(t)\right)\right) \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(S\mu(t)-(1+\varepsilon)\lambda(t)\right) = -\alpha_*(t),\end{aligned} \tag{2.18}$$

и далее оценки получаются тем же образом.

Замечание 2. *Если все интенсивности (поступления, обслуживания требований, катастроф) 1-периодичны, то:*

1) вместо условия (2.15) достаточно потребовать, чтобы $\int_0^1 \left(S\mu(t)-\lambda(t)\right)\,dt > 0$;

2) можно выбрать «особые» предельные характеристики, а именно существует 1-периодический предельный режим $\pi(t)$ и соответствующее ему 1-периодическое предельное среднее $\phi(t)$;

3) эти предельные характеристики можно приближенно построить, пользуясь методикой, разработанной в [8, 6], с использованием усеченного процесса и оценок скорости сходимости.

Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда условия предыдущих теорем не выполняются.

Теорема 3. *Пусть при некотором натуральном N выполняется условие*

$$\inf_n \zeta_{nN} = \zeta > 0 \tag{2.19}$$

вместо (2.3). Пусть, кроме того, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = +\infty, \tag{2.20}$$

где

$$g(t) = \min\left(\zeta\xi(t) - \delta\lambda(t) - \delta S\mu(t),\ \lambda(t) - (1+\delta)\,S\mu(t)\right). \tag{2.21}$$

Тогда процесс $X(t)$ слабо эргодичен и имеет предельное среднее.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 1. При этом вспомогательная последовательность $\{d_k\}$ выбирается следующим образом: $d_{-1} = d_0 = 1$, $d_{k+1} = (1+\varepsilon)^{-1}d_k$, если $k \neq iN-1$, $d_{k+1} = (1+\varepsilon)^N d_k$ при $k = iN-1$, где положительное число $\varepsilon < \delta$ таково, что $(1+\varepsilon)^N - 1 < \delta$. Тогда получаем

$$\alpha_k\,(t) \geq \lambda\,(t) + S\mu\,(t) + \zeta_{k+1}\xi(t) - S\mu(t)(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)^{-1}\lambda\,(t) \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\lambda(t) - (1+\varepsilon)S\mu(t)\right) \tag{2.22}$$

при $k \neq iN-1$ и

$$\alpha_k\,(t) \geq \zeta\xi(t) - \varepsilon S\mu(t) - \Big((1+\varepsilon)^N - 1\Big)\,\lambda\,(t) \tag{2.23}$$

при $k = iN-1$.

Отсюда вытекает, что

$$\gamma\left(B(t)\right)_{1D} \leq -g(t), \tag{2.24}$$

причем последовательность $\{d_k\}$ построена так, что выполняется и условие $\omega = \inf\limits_{k\geq 1}\frac{d_k}{k} > 0$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если при выполнении условий теоремы 3 в качестве предельного режима и предельного среднего выбрать режим $\pi(t)$ и среднее $\phi(t)$, соответствующие начальному условию $X(0) = 0$, то при любом начальном условии вида $X(0) = k$ справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq \frac{4r_k}{d} e^{-\int\limits_0^t G(\tau)\,d\tau} \tag{2.25}$$

и

$$|E_k(t) - E_0(t)| \le \frac{4r_k}{d\omega} e^{-\int\limits_0^t G(\tau)\,d\tau}, \tag{2.26}$$

где $d = \min d_k$, $r_k = \sum_{i \le k-1} d_i$, *а*

$$G(t) = \min\Big(\zeta\xi(t) - \varepsilon S\mu(t) - \Big((1+\varepsilon)^N - 1\Big)\lambda(t)\,,\ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\lambda(t) - (1+\varepsilon)S\mu(t)\right)\Big) \ge g(t).$$

Замечание 3. *В случае 1-периодических интенсивностей за счет более сложного выбора вспомогательной последовательности* $\{d_k\}$ *условия теоремы можно существенно ослабить.*

3 Пример

Рассмотрим систему обслуживания $M(t)/M(t)/100$ с катастрофами в случае периодических интенсивностей в разных ситуациях, гарантирующих слабую эргодичность модели, и вычислим предельное среднее $\phi(t)$, а также асимптотику величины $J_0(t)$ – вероятности того, что в момент t очередь пуста, то есть в системе обслуживания нет ни одного требования, и величины $J_{10}(t) = \Pr\left(X(t) \le 10\right)$.

При вычислениях используется следствие 4 из работы [6], которое с учетом конкретной модели и зависимости интенсивностей катастроф от состояния выглядит следующим образом:

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1,* $X_n(t)$ *– соответствующий усеченный процесс, а* $X(0) = X_n(0) = 0$. *Тогда при всех* $t \ge 0$ *и любом* n *справедливы оценки*

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_1 \le \limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left(4\left(1+\varepsilon\right)^k \varepsilon^{-1} e^{-\int\limits_0^t (\zeta\xi(\tau) - \varepsilon\lambda(\tau))\,d\tau} + 6Lw_n^1 t\right) \tag{3.27}$$

и

$$|\phi(t) - E_{0,n}(t)| \le \limsup_{t\to\infty} \|\pi(t)\|_{1D} \left(\frac{4\,(1+\varepsilon)^k}{\omega\varepsilon} e^{-\int\limits_0^t (\zeta\xi(\tau)-\varepsilon\lambda(\tau))\,d\tau} + 6Lw_n^2 t \right), \qquad (3.28)$$

где $L = \sup_{[0,1]} (\lambda(t) + S\mu(t) + M\xi(t))$, $w_n^1 = \sup_{k\ge n} \frac{1}{d_k}$, $w_n^2 = \sup_{k\ge n} \frac{k}{d_k}$ *и* $E_{0,n} = E_k(t) = E\left\{X_n(t)\,|X_n(0) = 0\right\}$ *, а* $\pi(t)$ *– существующий 1-периодический предельный режим.*

Замечание 4. *Аналогичные оценки (с изменением первого слагаемого в скобках) получаются при выполнении условий теорем 2 и 3.*

1. Выбираем вначале интенсивности следующим образом: $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$, $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$, $\xi_n(t) = 100 + \sin 4\pi t, n \ge 1$. Тогда при $\varepsilon = 0.4$ выполнены условия теоремы 1 и для построения предельных 1-периодических характеристик (с точностью до 10^{-5}) достаточно выбрать размерность усеченного процесса $n = 100$ и построить нужные характеристики для усеченного процесса с нулевым начальным условием на отрезке $[8, 9]$. Соответствующие графики приведены на рисунках 1–3.

2. Выбирая теперь $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$, $\mu(t) = 10 + \sin 4\pi t$, $\xi_n(t) = \frac{2+\sin 4\pi t}{n}$, получаем выполнение условий теоремы 2 при $\varepsilon = 3.0$, при этом $n = 65$, а в качестве необходимого отрезка будет $[1.5, 2.5]$, см. рисунки 4–6.

3. Если, наконец, взять $\lambda(t) = 240 + \cos 2\pi t$, $\mu(t) = 1 + \sin 4\pi t$, $\xi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \ne 3k, \\ 153 + \sin 4\pi t, & \text{если} \quad n = 3k \end{cases}$, то выполнены условия теоремы 3, при этом $\varepsilon = 0.15$, $n = 250$, $t \in [19, 20]$, см. рисунки 7–9.

Список литературы

[1] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* On the M/M/1 queue with catastrophes and its continuous approximation // Queueing Syst., 2003. Vol. 43. P. 329–347 .

[2] *Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G., Ricciardi L. M.* A note on birth-death processes with catastrophes // Statist. Probab. Lett., 2008. Vol. 78. P. 2248–2257.

[3] *Van Doorn E. A., Zeifman A.* Extinction probability in a birth-death process with killing // J. Appl. Probab., 2005. Vol. 42. P. 185–198.

[4] *Krishna Kumar B., Arivudainambi D.* Transient solution of an M/M/1 queue with catastrophes // Comput. Math. Appl., 2000. Vol. 40. P. 1233–1240.

[5] *Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Bening V., Shorgin V.* Some bounds for $M(t)/M(t)/S$ queue with catastrophes // Proceedings of SMCTools08. Athens, Greece, 2008.

[6] *Зейфман А.И., Сатин Я.А., Чегодаев А.В.* О нестационарных системах обслуживания с катастрофами // Информатика и ее применения, 2009. Т. 3. Вып. 1. С. 47–54.

[7] *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифф. уравнения, 1971. Т. 7. С. 1696–1698.

[8] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing syst., 2006. Vol. 52. P. 139–151.

[9] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008.

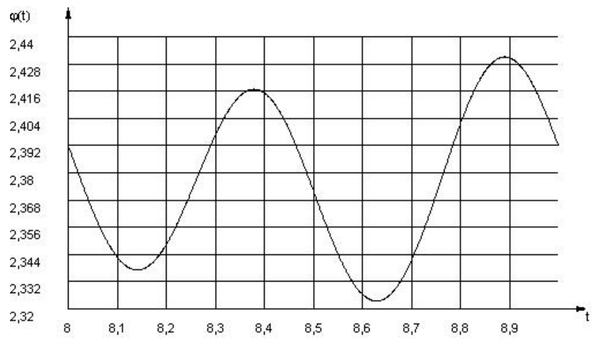

Рис. 1 Случай 1, приближенное значение предельного среднего

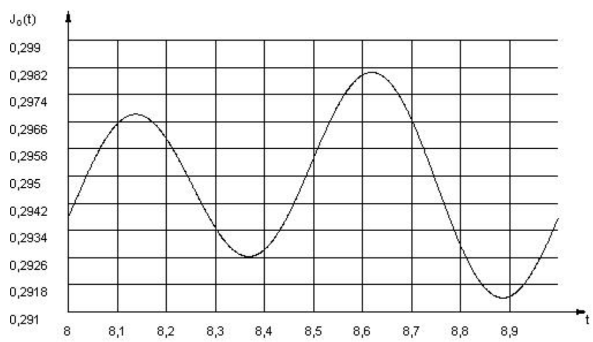

Рис. 2 Случай 1, приближенное значение предельной величины $J_0(t) = \Pr\left(X(t) = 0\right)$

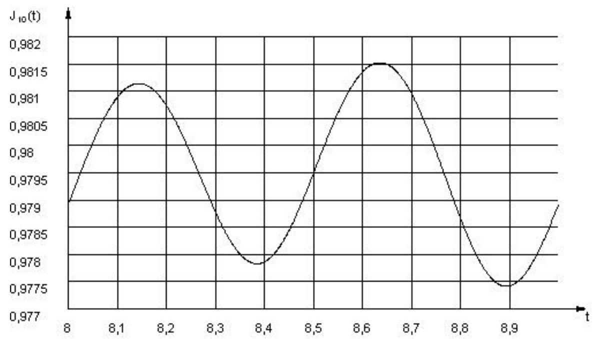

Рис. 3 Случай 1, приближенное значение предельной величины $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \leq 10)$

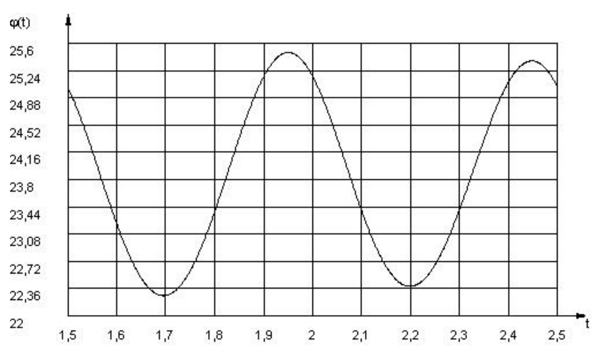

Рис. 4 Случай 2, приближенное значение предельного среднего

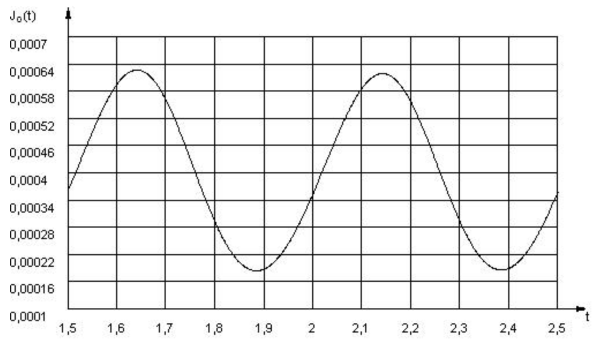

Рис. 5 Случай 2, приближенное значение предельной величины $J_0(t) = \Pr\left(X(t) = 0\right)$

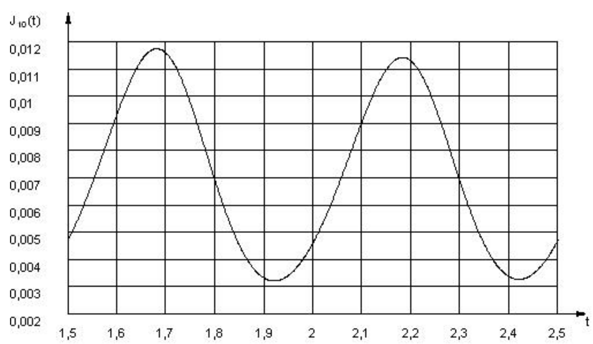

Рис. 6 Случай 2, приближенное значение предельной величины $J_{10}(t) = \Pr\left(X(t) \leq 10\right)$

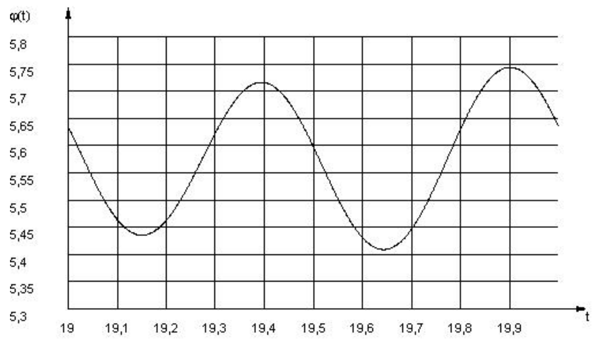

Рис. 7 Случай 3, приближенное значение предельного среднего

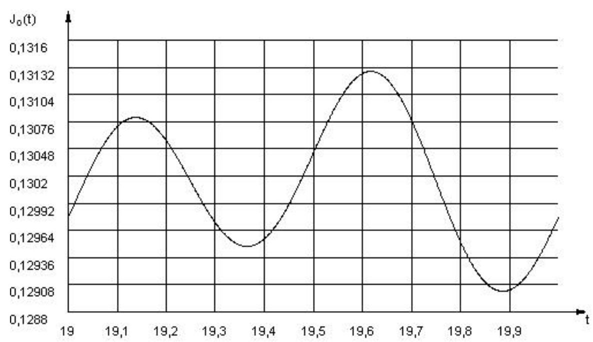

Рис. 8 Случай 3, приближенное значение предельной величины $J_0(t) = \Pr(X(t) = 0)$

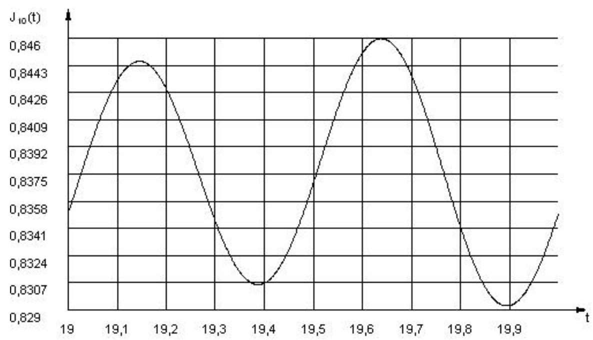

Рис. 9 Случай 3, приближенное значение предельной величины $J_{10}(t) = \Pr(X(t) \le 10)$